LÖSNINGSFÖRSLAG MSG110 SANNOLIKHETSTEORI, GU, 4/1 2016
OLLE NERMAN.

1a. BAYES FORMEL. OM $A =$ "CANCER" OCH $B =$ "POSITIVT PROV" SÅ ÄR

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\, P(A^c)} = \frac{0{,}93\cdot 0{,}02}{0{,}93\cdot 0{,}02 + 0{,}03\cdot 0{,}98} \approx$$

$$\approx 0{,}3875$$

b. MAN KAN ANTA ATT $X \sim \text{BINOMIAL}(100, 0{,}3875)$ SÅ ATT $E[X] = 100\cdot 0{,}3875 = 38{,}75$

---

2 a. m=MEDIANEN ÄR BESTÄMD AV ATT $P(X \le m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{m-3}{2}\right) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{m-3}{2} = 0$, D.V.S. $m = 3$.

b. SANNOLIKHETSTÄTHETEN FÖR X ÄR $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$
DETTA UTTRYCK ÄR MAXIMALT NÄR EXPONENTEN ÄR 0 VILKET INTRÄFFAR NÄR $x = 3$. VÄRDET ÄR PÅ
$f(3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$

c. $P(|X| > 4) = P(X < -4) + P(X > 4) = \Phi\left(\frac{-4-3}{2}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right)\right)$

$= 1 + \Phi(-3{,}5) - \Phi(0{,}5) = 2 - \Phi(3{,}5) - \Phi(0{,}5) \approx 2 - 0{,}6915 - 0{,}99977$

$\approx 0{,}31$

d. ÖVRE KVARTILEN k SÄG LÖSER $\Phi\left(\frac{k-3}{2}\right) = 0{,}75$
$\Rightarrow \frac{k-3}{2} \approx 0{,}68 \Rightarrow k \approx 3 + 1{,}36 = 4{,}36$

---

3. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$ T = TOTALA KOSTNADEN
$\approx N(200\cdot 4925,\ 200\cdot 1000^2) = N(985\,000,\ 200\,000\,000)$
$\Rightarrow P(T \ge 1\,000\,000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1\,000\,000 - 985\,000}{\sqrt{200}\cdot 1000}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}06)$
$\approx 1 - 0{,}8554 = 0{,}1446$

---

4 a. EFTERSOM $P(X \le k) = \frac{\binom{k}{2}\binom{3}{k-2}}{\binom{5}{k}}$ FÖR $k = 2,3,4,5$

SÅ FÅS $P(X \le 2) = \frac{1}{10}$, $P(X \le 3) = \frac{3}{10}$, $P(X \le 4) = \frac{6}{10}$
OCH $P(X \le 5) = 1$ DETTA GER SANNOLIKHETSFUNKTIONEN
$P(X = 2) = \frac{1}{10}$ $P(X = 3) = \frac{2}{10}$ $P(X = 4) = \frac{3}{10}$ $P(X = 5) = \frac{4}{10}$

b. $E[X] = 2\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{2}{10} + 4\cdot\frac{3}{10} + 5\cdot\frac{4}{10} = \frac{40}{10} = 4$

c. $VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 2^2\cdot\frac{1}{10} + 3^2\cdot\frac{2}{10} + 4^2\,\frac{3}{10} + 5^2\cdot\frac{4}{10} - 4^2 = 17 - 16 = 1$
$\Rightarrow \sqrt{VAR[X]} = \sqrt{1} = 1$

5. a. $f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$, $x\ge 0$

b. $F_{X^2}(y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}P(X\le\sqrt{y}) & \text{FÖR } y\ge 0\\ 0 & \text{FÖR } y<0\end{cases}$

$=\begin{cases}P(X\le\sqrt{y})=\begin{cases}1-e^{-\frac{\sqrt{y}}{4}} & \text{FÖR } y\ge 0\\ 0 & \text{FÖR } y<0\end{cases}\end{cases}$

c. $f_{X^2}(y)=\begin{cases}\frac{d}{dy}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{y}}{4}}\right) & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=$

$=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{\sqrt{y}}{4}}}{8\sqrt{y}} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

6. a. t-INTERVALL (MED $n-1=15$ FRIHETSGRADER).

$\mu\le 670+1{,}7531\cdot\frac{51}{\sqrt{16}}\approx 692{,}35$ (95 %)

b. KORRESPONDENSPRINCIPEN $\Rightarrow$ FÖRKASTA H_0 OM INTERVALLET I a INTE INNEHÅLLER 12×60 MINUTER. $12\times 60=720$ GER BESLUTET ATT FÖRKASTA H_0 PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN $1-0{,}95=0{,}05=5\,\%$.

7. a. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1 \Leftrightarrow c\left(\int_0^{\infty}e^{-x}dx\right)\cdot\left(\int_0^{\infty}ye^{-y}dy\right)=1$

$\Rightarrow c\cdot 1\cdot 1=1$ D.V.S. $c=1$

b. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=e^{-x}$ OCH P.S.S. $f_Y(y)=ye^{-y}$

c. AV b FÖLJER ATT $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ OCH DÄRAV OBEROENDET PER DEFINITION.

8. a. LÅT $X^{(1)}\le X^{(2)}\le\ \le X^{(5)}$ VARA STORLEKSORDNADE STICKPROVET

$-\ln L(c)=+\sum_{i=1}^{5}|x_i-c|=+\sum_{i=1}^{5}|x^{(i)}-c|$ EN FUNKTION SOM HAR DERIVATOR SOM ÄR NEGATIVA FÖR $c<x^{(3)}$ OCH POSITIVA FÖR $c>x^{(3)}$ (UTOM I UNDANTAGSPUNKTERNA $x^{(1)},x^{(2)},\dots x^{(5)}$). FUNKTIONEN ÄR KONTINUERLIG. HÄRAV FÅS ATT MINIMUM (D.V.S. MAXIMUM AV $L(c)$) ANTAS I PUNKTEN $c=X^{(3)}$ SOM BLIR TEORETISK ML-SKATTNING.

b. OBSERVERAD ML-SKATTNING ÄR $x^{(3)}=6.0$